Elastična linija grede

Elastična linija grede

- Pri dejstvu spoljašnjeg opterećenja, na neki nosač, dolazi do njegove deformacije, tj. osa nosača menja oblik.
- Oblik ose nosača, koji nastaje pri deformaciji naziva se elastična linija grede.
- Da bismo odredili jednačinu ove linije, potrebno je uspostaviti vezu između spoljašnjeg opterećenja i deformacija, koje usled toga nastaju.
- Možemo je proširiti i na opšti slučaj, zanemarujući efekte klizanja, pa imamo:

$$\boxed{\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\,I},}$$

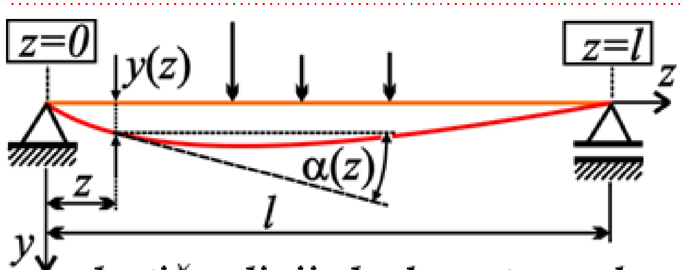
- gde je -ρ poluprečnik krivine deformisane ose, M - moment savijanja,
- E I - krutost nosača.
- Ova relacija poznata je kao Bernuli-Ojlerovı obrazac za krivinu elastične linije

Elastična linija grede

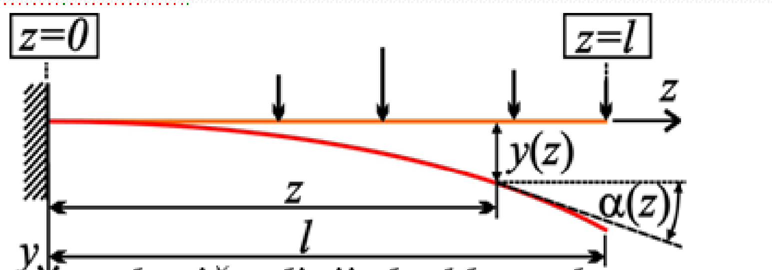
- Elastična linija, čija je jednačina y(z), je krivolinijski oblik ose nosača izazvan opterećenjem.
- Koordinatni sistem ćemo uvek uzimati tako da je koordinatni početak na levom kraju nosača, gde je osa z usmerena u desnu stranu a osa y naniže.
- Za svako z se zna y (ugib) i α (ugao nagiba, nagib).
- To znači da se ugao nagiba (nagib) na ma kom mestu nosača, označen sa α, β ili drugačije, određuje preko prvog izvoda jednačine elastične linije.

Elastična linija grede

- Jednačine elastičnih linija, u elementarnim slučajevima proste grede i konzoledobijene su nakon integracija diferencijalne jednačine elastične linije gde se integracione konstante dobijaju iz graničnih uslova.



elastična linija kod proste grede

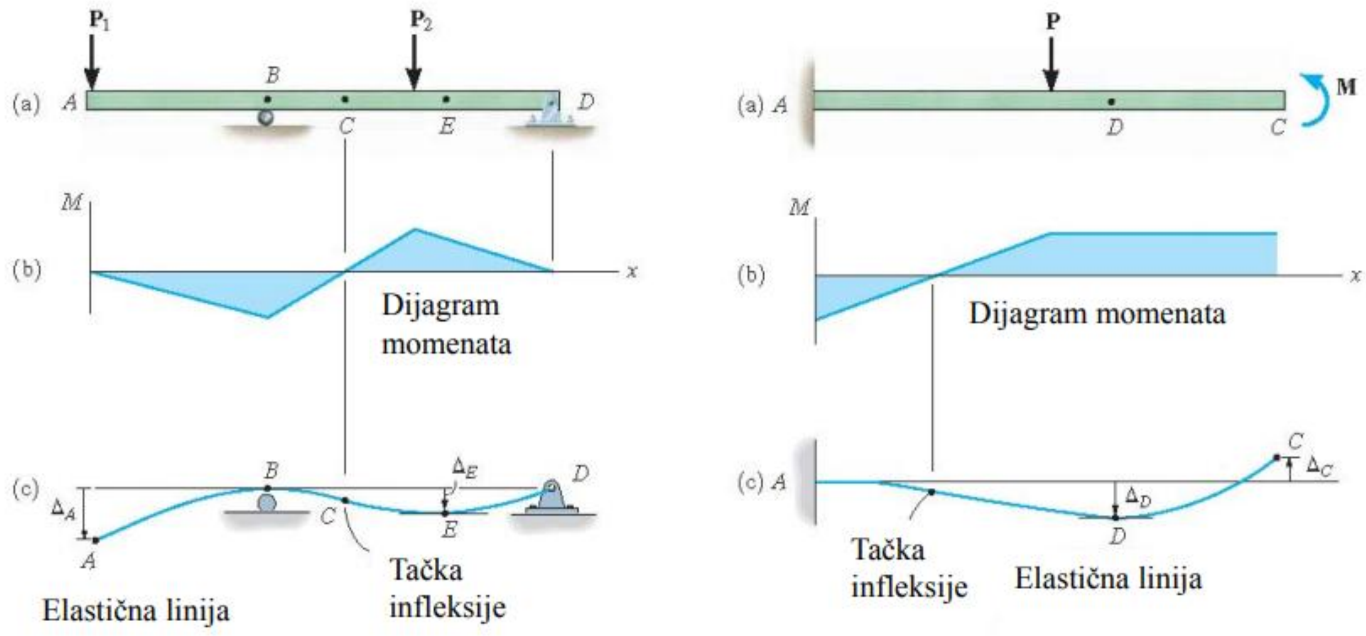


elastična linija kod konzole

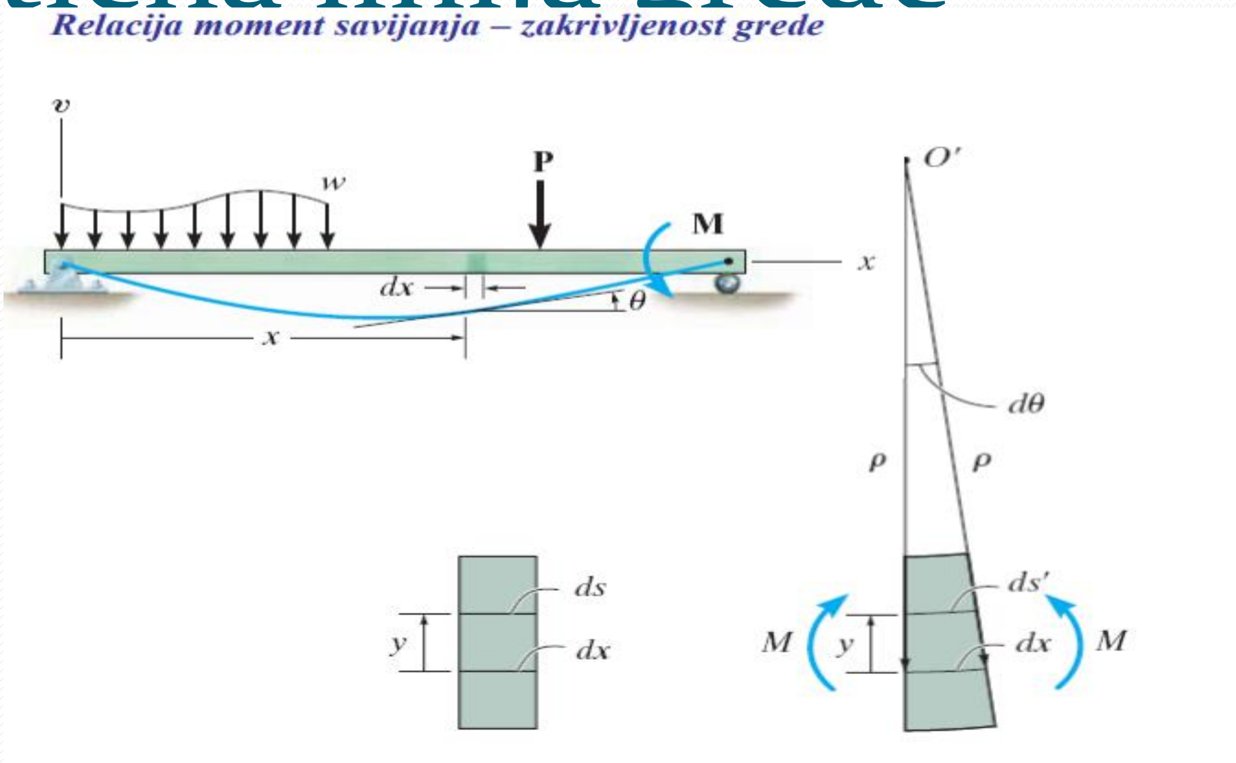
Granični uslovi za prostu gredu su: $y(0)=0$ i $y(l)=0$, a za konzolu: $y(0)=0$ i $y'(0)=0$.
Dakle, na mestu oslonaca ugibi su jednaki nuli a na mestu uklještenja i ugib inagib.

Elastična linija grede

Kriva ugiba uzdužne ose koja prolazi kroz težište svih poprečnih presjeka grede – *elastična linija*.



Elastična linija grede



- Pre deformacije Posle deformacije

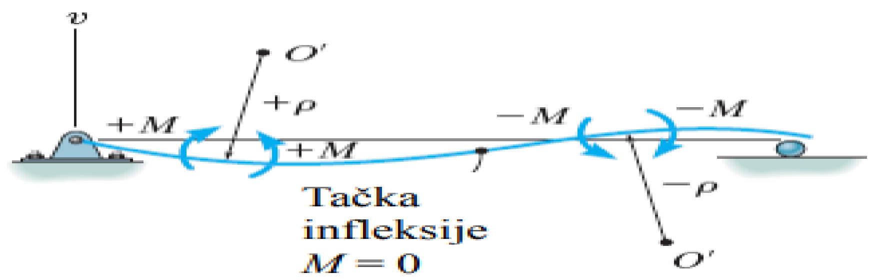
Elastična linija grede

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{Ey}{\rho} = -E\kappa y$$

$$\sigma_x = -\frac{My}{I_z}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$



Elastična linija grede

Zakrivljenost funkcije $v=f(x)$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1+\left(dv/dx\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1+\left(dv/dx\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EI_z}$$

Elastika – tačan oblik elastične linije (usljed momenta savijanja!!!)

Usljed ispunjenja tolerancije ili estetskih razloga, većina vratila i osovina ima plitku elastičnu liniju, pa vrijedi da je dv/dx veoma malo!!!

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1+\left(dv/dx\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EI_z} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI_z}$$

Elastična linija grede

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI_z}$$

Jednačina momenta savijanja

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M(x)}{E(x)I_z(x)}\Rightarrow\frac{dv}{dx}=\int\frac{M(x)}{E(x)I_z(x)}dx+C_1\Rightarrow v=\int\left(\int\frac{M(x)}{E(x)I_z(x)}dx+C_1\right)dx+C_2$$

$$\frac{dM}{dx}=V(x)\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)=\mathrm{V}(x)$$

Jednačina smičućih/transferzalnih sila

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-w(x)\Rightarrow\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)=-w(x)\Rightarrow\frac{dV}{dx}=-w(x)$$

Jednačina opterećenja

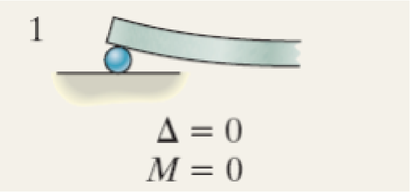
Za *EI=const*

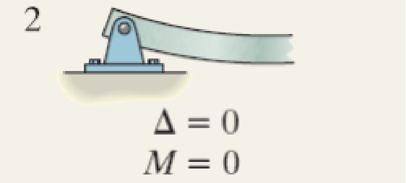
$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=M(x)\qquad EI\frac{d^3v}{dx^3}=V(x)\qquad EI\frac{d^4v}{dx^4}=-w(x)$$

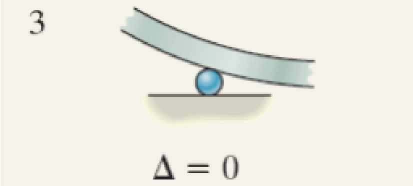
Elastična linija grede

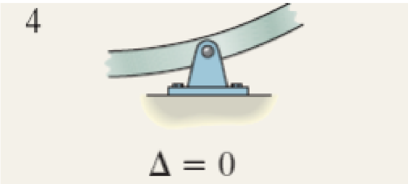
Granični uslovi

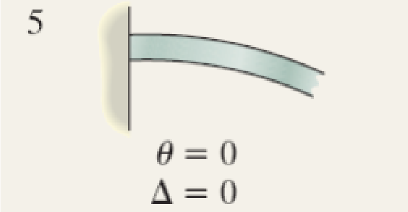
Neophodni za izračunavanje konstanti integracije

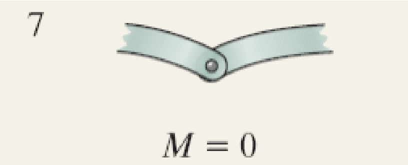












$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{E(x)I_z(x)} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \int \frac{M(x)}{E(x)I_z(x)} dx + C_1 \Rightarrow v = \int\left(\int \frac{M(x)}{E(x)I_z(x)} dx + C_1\right)dx + C_2$$

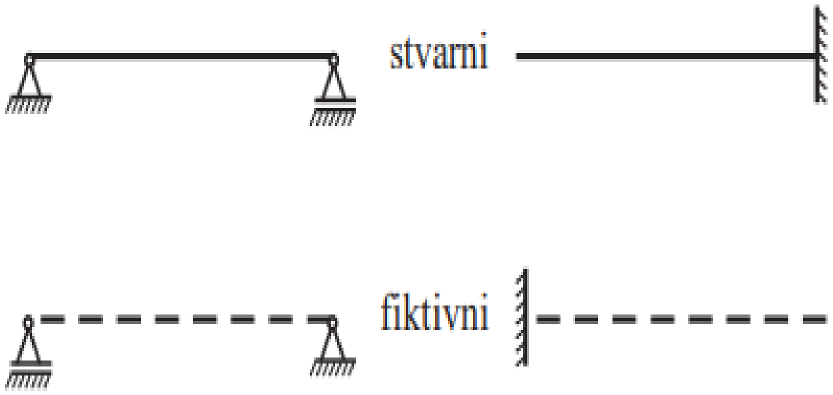
Elastična linija grede

- **Odre đivanje ugiba i nagiba elastične linije metodom fiktivnog nosača**
- Veza između ugiba (v), nagiba (v1 = α) i napadnog momenta data je relacijama:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = v', \qquad \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}z} = -\frac{M_x}{E\,I_x},}$$

- Da bi se uspostavila analogija graničnih uslova, mora na mestu gde je na stvarnom nosaču slobodan kraj (ugib v =0, nagib α ≠ 0) biti na fiktivnom nosaču tako đe slobodno oslonjen kraj (tu je napadni moment=0, transverzalna sila ≠ 0). Slobodnom kraju (α ≠ 0, v ≠ 0) odgovara uklještenje (M ≠ 0, T ≠ 0). Uklještenom kraju (v = 0, α = 0) odgovara slobodan kraj (M = 0, T = 0).

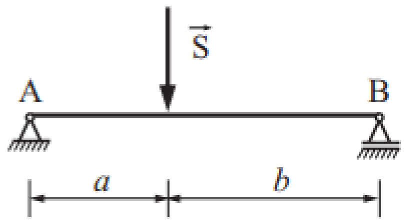
Elastična linija grede



- Stvarni nosač fiktivni nosač

Elastična linija grede

- Primer:
- Odrediti ugib i nagib grede, opterećene koncentrisanom silom



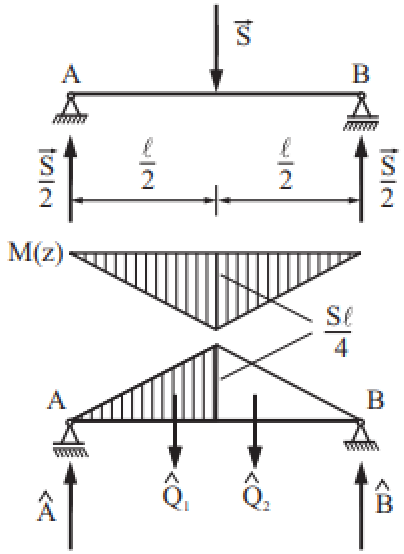
Rešenje:

Određivanje otpora oslonaca:

$$\sum M_B = 0 = A\,\ell - S\,b \quad \Rightarrow \quad A = \frac{b}{\ell}\,S, \quad (a+b=\ell)$$

$$\sum M_A = 0 = S\cdot\ell - B\cdot\ell \quad \Rightarrow \quad B = \frac{a}{\ell}\,S.$$

Elastična linija grede



Nagib:

$$\alpha_A = \frac{\hat{A}}{E\,I_x}.$$

$$\hat{Q}_1 = \frac{1}{2}\frac{S\,\ell}{4}\frac{\ell}{2} = \frac{S\,\ell^2}{16},$$

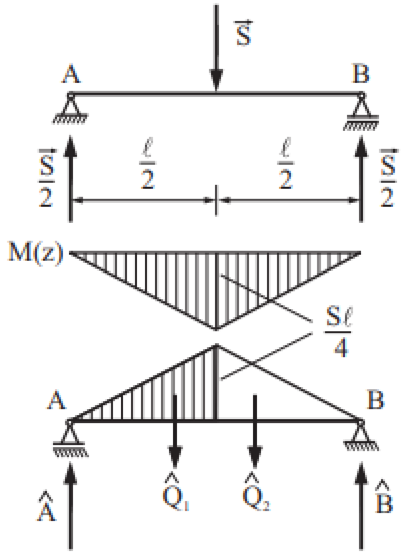
$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2 = \hat{A} = \hat{B},$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \frac{S\,\ell^2}{16}.$$

Konačno dobijamo izraz za nagib:

$$\alpha_A = \frac{S\,\ell^2}{16\,E\,I_x}.$$

Elastična linija grede



Ugib:

$$v_c = \frac{\hat{M}_c}{E\,I_x}.$$

$$\hat{M}_c = \hat{A}\frac{\ell}{2} - \hat{Q}_1 \frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{S\,\ell^3}{48}.$$

Konačno dobijamo ugib u tački C (ispod sile S):

$$v_c = \frac{S\,\ell^3}{48\,E\,I_x}.$$

Elastična linija grede

- Primer 2

Odredimo nagibe α_A i α_B, na mestu oslonaca A i B, od momenta koji deluje u osloncu A.

<u>*Rešenje:*</u>

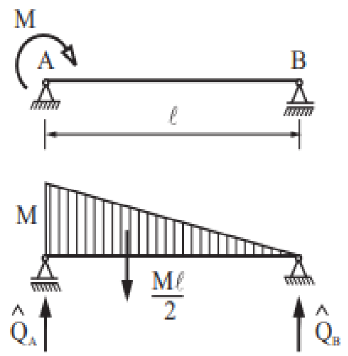
$$\sum M_B = -\frac{1}{2}M\ell\cdot\frac{2}{3} - \ell\hat{Q}_A = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\hat{Q}_A = \frac{1}{3}M\,\ell \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_A^M = \frac{\hat{Q}_A}{EI} = \frac{M\,\ell}{3EI}.$$

Slično dobijamo i:

$$\alpha_B^M = \frac{\hat{Q}_B}{EI} = \frac{M\,\ell}{6EI}.$$



Slika 11.5: uz zadatak 11.1.